

CCS 2010 1. Zh

1 Elmélet - 15p

1. Mi a $\delta(t)$ (Dirac impulzus) definíciója? (1p)

MO: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$, ahol f tetszőleges síma függvény.

2. Hogyan értelmezzük a rendszer fogalmát? Milyen rendszerleírási módokat ismer LTI rendszerek esetén? (3p)

MO: Rendszer: Absztrakt operátor, a bemeneti jelhez rendel kimeneti jelet: $y = S[u]$.

- Bemenet-kimeneti leírási mód: Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek, átviteli fv.
- Állapottér modell

3. Ha

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

igaz-e hogy (indokás/ellenpélda!)?

- Ha $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ nevezőjének minden gyöke negatív valós részű, akkor a rendszer stabil. (2p)
- Az irányíthatósági mátrix invariáns a T állapottranszformációra, ha T teljes rangú (2p).
- Ha az A mátrix főátlójában lévő elemek negatívak, a rendszer stabil (2p).
- Ha létezik olyan P és Q hogy $A^T P + PA = -Q$ $P, Q > 0$, akkor a rendszer stabil (2p).

MO:

- Igen, mivel ezek A sajátértékei.
- Nem, az irányíthatósági mátrix *rangja*, és az irányíthatóság invariáns. (ha a transzformált rendszer jele $\tilde{y}$, akkor $\tilde{C} = TC$)
- Nem, csak diagonális realizáció esetén. Ellenpélda pl: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \{-3, 1\}$
- Igen, ez a Ljapunov egyenlet, aminek bal oldala a $V(x) = x^T P x$ Ljapunov függvény deriváltja.

4. Mi egy nem megfigyelhető LTI rendszer nem megfigyelhető altere, és mi a jelentősége (3p)?

MO: $\ker(\mathcal{O}_n)$ által kifeszített alter. Jelentőség: azon kezdeti értékek halmaza, amelyek a rendszer kimenetének ismeretében nem különíthetők el egymástól, azaz az állapottér-modellt a nem megfigyelhető alter különböző pontjaiból mint kezdeti értékekből indítva a rendszer ugyanazt a kimeneti függvényt adja.

2 Gyakorlat - 15p

1. Legyen

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2-s-6}$$

illetve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 2) \quad D = 0$$

- (a) Realizációja-e $H(s)$ -nek a megadott állapotér modell? (2p)
- (b) Minimális realizációja-e $H(s)$ -nek a megadott állapotér modell? (2p)
- (c) Megfigyelhető-e az adott állapotér modell? Miért? (2p)
- (d) Stabil-e az adott állapotér modell? Miért? (2p)

MO:

- (a) Igen, mivel controller form, vagy igen mivel $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- (b) Nem, mert $H(s)$ egyszerűsíthető $H(s) = \frac{(s+2)}{(s-3)(s+2)}$, Vagy nem, mert (A,B,C) nem megfigyelhető
- (c)

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- (d) Nem, mert $\exists \lambda \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Végezze el a rendszer irányíthatósági dekompozícióját (3p)!

MO:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (pl) \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $x_1, x_2 \in [0, \pi)$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\sin(2x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sin(2x_2)\end{aligned}$$

illetve

$$V(x) = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_2$$

- Ljapunov függvénye-e V a fenti rendszernek (3p)?
- Mi lesz a rendszer *stabil* egyensúlyi pontja (1p)?

MO:

- Igen,

$$V > 0 \quad \frac{dV}{dx} = [2\sin x_1 \cos x_1 \quad -2\cos x_2 \sin x_2] = [\sin(2x_1) \quad -\sin(2x_2)]$$

$$\frac{dV}{dx} \dot{x} = -\sin^2(2x_1) - \sin^2(2x_2)$$

- Ahol $V(x)=0$: $x^* = [0 \quad \pi/2]'$